

闫伟、牛安福、陈国琴, 2015, 不规则载荷影响地表近场垂向位移和倾斜观测的定量计算, 中国地震, 31(2), 297 ~ 307。

# 不规则载荷影响地表近场垂向位移和 倾斜观测的定量计算

闫伟 牛安福 陈国琴

中国地震台网中心, 北京市西城区三里河南横街 5 号 100045

**摘要** 基于均匀的、各向同性的半无限弹性体的点状载荷模型引起周边垂向位移场变化的解析解, 本文推导了水平倾斜场的解析解计算方法, 给出了二维、三维不规则形状载荷对地面或地下某点的垂直位移和水平倾斜的解析解计算方法。并对比分析了质点简化模型和不规则模型的差异性。最后给出了据不规则形状载荷模型得到的近场垂直位移以及水平倾斜场的展布特征。研究表明, 相对质点简化模型, 不规则载荷模型对近场的刻画具有一定优势; 二维不规则形状载荷模型的建立, 使得将载荷散点化后再将矢量叠加进行计算成为可能; 三维不规则形状载荷模型在载荷散点化后, 通过赋予散点的不同权重进行载荷重新分配, 然后用矢量计算法获取位移场的变化; 在二维和三维不规则载荷散点化后的矢量叠加过程中都存在着较明显的收敛过程, 表明该计算方法的正确性和可行性。

**关键词:** 载荷模型 倾斜观测 垂向位移观测 解析解

[文章编号] 1001-4683(2015)02-0297-11

[中图分类号] P315

[文献标识码] A

## 0 引言

随着国家“十五”前兆台网建设, 地震观测系统已建成包括 260 多个 GPS 站点、1000 多个地表和钻孔倾斜观测站的观测网络, 为地壳运动和地表倾斜前兆观测提供了大量的数据支撑, 不少学者探讨了震前形变异常的变形特征(张晶等, 2006、2007、2009; 邱泽华等, 2010; 邱泽华, 2014; 牛安福等, 2009、2012、2013)。另一方面, 随着基础设施建设的增多, 各台站的观测环境受到的影响益发严重, 台站周边存在着越来越多的载荷影响(朱航等, 2010; 刘瑞春等, 2012; 马栋等, 2014)。

载荷对周边变形观测影响的理论分析在地震前兆观测或地基沉降监测研究中具有一定意义(张蕙兰, 2013; 黄庆享, 2005; 杨国春等, 2002)。由于实际载荷多为不规则形状, 在处理相关问题时, 不少学者利用数值分析技术探讨其周边位移应变解(Wang, 2000、2002; 杜瑞林等, 2004), 也有学者通过将模型简化成质心点载荷模型的方式获得该问题的近似解析解

[收稿日期] 2015-03-06; [修定日期] 2015-04-17

[项目类别] 中国地震局监测预报司 2015 年度震情跟踪定向工作任务(2015020201)和“十二五”科技支撑计划(2012BAK19B02)联合资助

[作者简介] 闫伟, 1982 年生, 硕士, 助理研究员, 主要从事地壳变形分析工作。E-Mail: ywpro@163.com

(胡卫建等,2002;邱泽华,2004;骆鸣津等,2008;李祖宁等,2007)。由于质心简化模型的前提是水平距离相对载荷尺寸较长,但此时载荷的影响量也会随着距离的增加而减小。为了精细刻画载荷近场的影响,有必要研究不规则形状载荷模型近场解析解的计算方法。由于目前大部分前兆观测为地表或近地表观测,因此本文将研究重点定位在单层介质的不规则形状解析解模型的建立和分析。

## 1 质心点状载荷模型周边垂向位移场和倾斜场

### 1.1 质心点状载荷模型周边垂向位移场

在均匀的、各向同性的半无限弹性体表面作用一竖向集中力  $P$  时(图 1),任意点  $M(x, y, z)$  的竖向正应力及竖向位移(沉降)可由布西内斯克解(Boussinesq,1885)计算。

$M(x, y, z)$  点的竖向正应力  $\sigma_z$  及竖向位移  $w$  可表示成如下形式

$$\sigma_z = \frac{3P}{2\pi R^2} \cos^3 \theta = \frac{3P}{2\pi} \cdot \frac{z^3}{R^5} \quad (1)$$

$$w = \frac{P(1 + \mu)}{2\pi E} \left[ \frac{z^2}{R^3} + (1 - 2\mu) \frac{1}{R} \right] \quad (2)$$

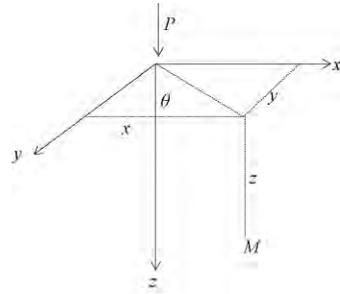


图 1 质心点状载荷模型坐标示意图

公式(1)、(2)中  $R$  为  $M$  点到集中力作用点  $P$  的距离,  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $E$  为杨氏模量,  $\mu$  为泊松比。

以砂岩介质为例,取杨氏模量  $E = 4 \times 10^7 \text{ Pa}$ ,泊松比  $\mu = 0.25$ ,点状集中载荷力  $P = 2.0 \times 10^4 \text{ N}$ ,利用公式(2)即可得到载荷周边垂向位移场空间分布(图 2(a)) 和深度为 0.1 m 处水平切面的垂向位移等值面的分布(图 2(b))。

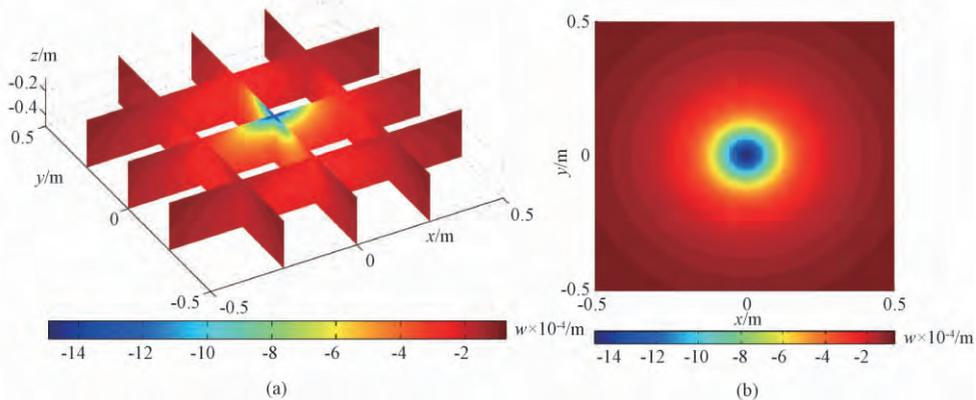


图 2 (a) 点状载荷模型垂向位移场三维切片图; (b) 深度为 0.1 m 水平切面上的垂向位移分布图

由图 2 可以看出,点状载荷所引起的垂向位移场的主要特征为:①载荷集中点处垂向位移最大;②垂向位移自载荷中心向  $x, y, z$  三个方向快速衰减;③深度为 0.1 m 水平切面垂向

位移也表现出自载荷中心向  $x$ 、 $y$  方向快速衰减的趋势。

### 1.2 质心点状载荷模型周边倾斜场

由于受到垂向载荷而引起的倾斜角度可表示为垂向位移与水平某方向位移之比的反正切函数。由公式(2)对  $R$  求偏导可得

$$\frac{\partial w}{\partial R} = -3 \frac{P(1+\mu)}{2\pi E} z^2 R^{-4} - \frac{P(1+\mu)}{2\pi E} (1-2\mu) R^{-2} \quad (3)$$

由  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , 对  $x$  和  $y$  分别求偏导可得

$$\frac{\partial R}{\partial x} = R^{-1}x, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = R^{-1}y \quad (4)$$

公式(3)、(4)相乘可得

$$T_x = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial x} = \left[ -3 \frac{P(1+\mu)}{2\pi E} z^2 R^{-4} - \frac{P(1+\mu)}{2\pi E} (1-2\mu) R^{-2} \right] R^{-1}x \quad (5)$$

$$T_y = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial w}{\partial R} \cdot \frac{\partial R}{\partial y} = \left[ -3 \frac{P(1+\mu)}{2\pi E} z^2 R^{-4} - \frac{P(1+\mu)}{2\pi E} (1-2\mu) R^{-2} \right] R^{-1}y \quad (6)$$

点状载荷引起  $x$  和  $y$  方向的倾斜角度  $\varphi_x$  和  $\varphi_y$  分别为

$$\varphi_x = \arctan(T_x), \quad \varphi_y = \arctan(T_y) \quad (7)$$

同样,以砂岩介质为例,取杨氏模量  $E = 4 \times 10^7 \text{ Pa}$ ,泊松比  $\mu = 0.25$ ,点状集中载荷力  $P = 2.0 \times 10^4 \text{ N}$ ,利用公式(7)即可得到深度为  $0.1 \text{ m}$  处水平切面的  $x$  和  $y$  方向倾斜场等值面分布(图3)。

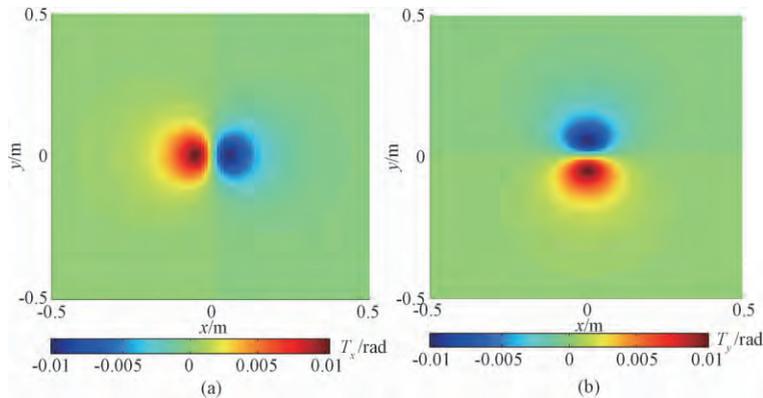


图3 深度为  $0.1 \text{ m}$  水平切面的倾斜场等值面图  
(a)  $x$  方向, (b)  $y$  方向

为了更直观地显示载荷周边倾斜场的分布情况,我们定义水平面倾斜的标量值

$$\theta = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} \quad (8)$$

点状载荷周边倾斜标量值及其深度为  $0.1 \text{ m}$  平面的倾斜方向如图4所示。

由点状载荷模型倾斜场分布(图3、4)可以看出,在深度为  $0.1 \text{ m}$  的水平切面上,倾斜量值最大的点并不在点载荷的位置,而是存在一定的水平偏离; $x$  和  $y$  倾斜方向指向载荷中心。

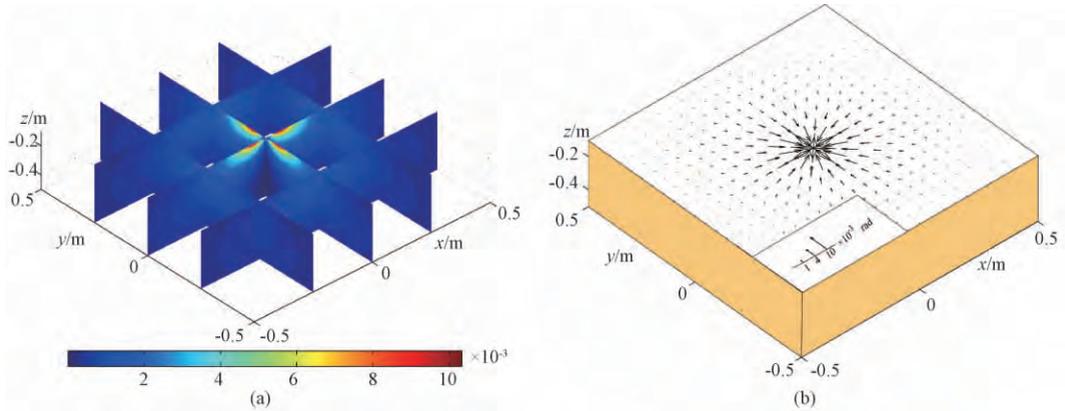


图4 (a) 点载荷周边倾斜标量值  $\theta$  的三维空间分布; (b) 深度为 0.1m 水平切面的倾斜矢量图

## 2 不规则形状载荷模型的建立

实际载荷的不规则形状可分为载荷分布均匀的二维不规则形状(如无边坡的平底池塘)、载荷分布不均匀的二维不规则形状(如无边坡的斜底池塘)、载荷密度均匀的三维不规则形状(如相同密度的山体)、载荷密度不均匀的三维不规则形状(如不同密度的山体)。为便于研究,可将其归纳为二维不规则形状载荷模型和三维不规则形状载荷模型。

### 2.1 二维不规则形状载荷模型的建立

针对二维不规则形状载荷模型,可将该模型的总作用力  $P$  进行散点化,各散点的作用力记为  $P_i$ ,分别求取各散点对某点  $M$  的垂向位移  $w_i$  和倾斜量  $(T_{xi}, T_{yi})$ ,然后求所有散点对  $M$  点作用的矢量和,即可得到该点的垂向位移  $w$  和倾斜量  $(T_x, T_y)$ 。设网格个数为  $n$ ,各变量间的关系为

$$P_i = \frac{P}{n} \quad (9)$$

$$w = \sum w_i \quad (10)$$

$$T_x = \sum T_{xi}, \quad T_y = \sum T_{yi} \quad (11)$$

其散点化过程如图5所示。在实际计算时,可将二维不规则模型以不同长度格网化,利用公式(2)、(5)、(6)分别求取  $M$  点的  $w_i$  和  $T_{xi}$  和  $T_{yi}$ ,然后利用公式(10)、(11)求取该点的垂向位移场  $w$  和倾斜矢量  $(T_x, T_y)$ 。

由于经过散点化的处理,因此需要验证计算结果随格网数目变化的收敛特征。图6给出了在杨氏模量  $E = 4 \times 10^7 \text{ Pa}$ 、泊松比  $\mu = 0.25$ 、总载荷  $P = 2.0 \times 10^4 \text{ N}$  的条件下,  $M$  点  $(1.5 \text{ m}, -1.5 \text{ m}, -0.2 \text{ m})$  处垂向位移  $w$  及其一阶差分  $\Delta w$  随不同的格网划分而发生的变化。从图中可以看出,随着格网数的增加,垂向位移收敛于  $-2.3663 \times 10^{-5} \text{ m}$  (图6(a)),垂向位移的一阶差分结果收敛于0 (图6(b));  $x$  和  $y$  方向倾斜角度分别收敛于  $-7.8278 \times 10^{-6} \text{ rad}$  和  $8.2101 \times 10^{-6} \text{ rad}$  (图6(c)、(e)),其一阶差分结果收敛于0 (图6(d)、(f))。该收敛特征也说明了运用散点化方法计算二维不规则形状载荷模型的正确性和可行性。

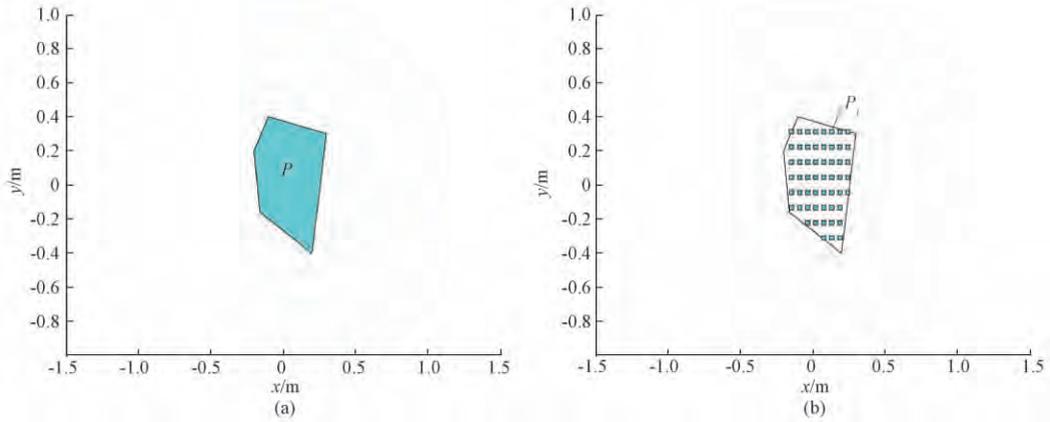


图 5 二维不规则模型散点化过程示意图

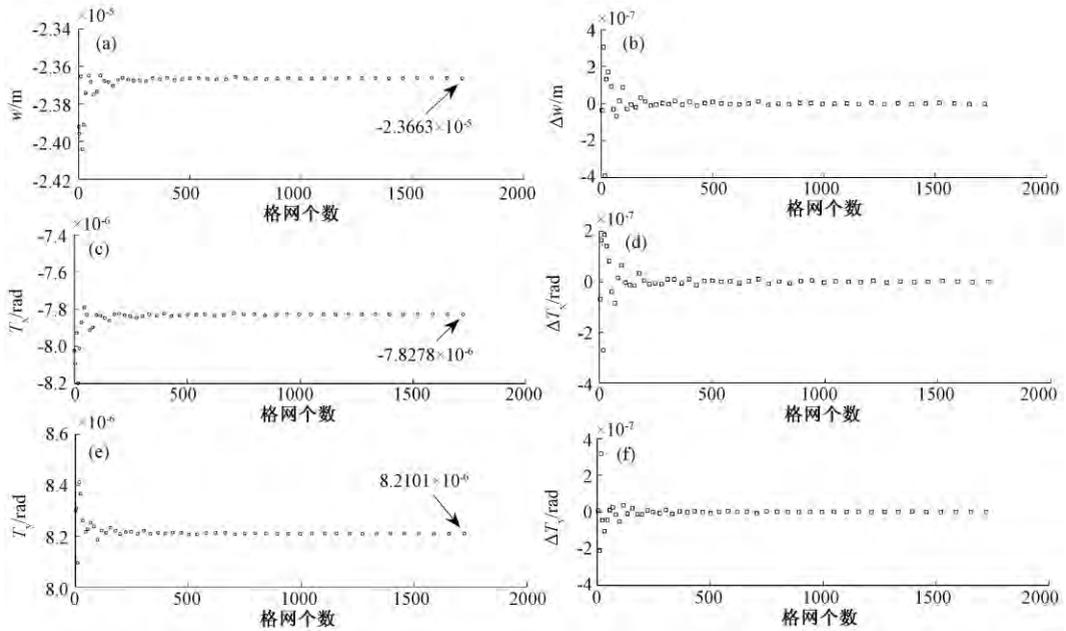


图 6 二维不规则形状载荷模型  $M$  点垂向位移、 $x$  方向倾斜角度、 $y$  方向倾斜角度与格网数的关系  
 其中, (a) 为垂向位移与格网个数的关系, (b) 为 (a) 序列的一阶差分; (c) 为  $x$  方向倾斜角度与格网个数的关系, (d) 为 (c) 序列的一阶差分; (e) 为  $y$  方向倾斜角度与格网个数的关系, (f) 为 (e) 序列的一阶差分

### 2.2 三维不规则形状载荷模型的建立

三维不规则形状载荷模型的建模思路与二维不规则形状载荷模型的建模方法基本一致,也是将不规则形状载荷进行散点化处理(图 7)。不同之处为:①针对密度均匀的三维不规则形状载荷,可将散点的高程( $H_i$ )作为权重对总载荷  $P$  进行重新分配(图 8);②针对密度不均匀的三维不规则形状载荷,可将散点的高程( $H_i$ )和密度( $\rho_i$ )的乘积作为权重对载荷  $P$  进行重新分配,即(12)式。

$$P_i = \frac{P}{n} \cdot \frac{H_i \rho_i}{\sum H_i \rho_i} \quad (12)$$

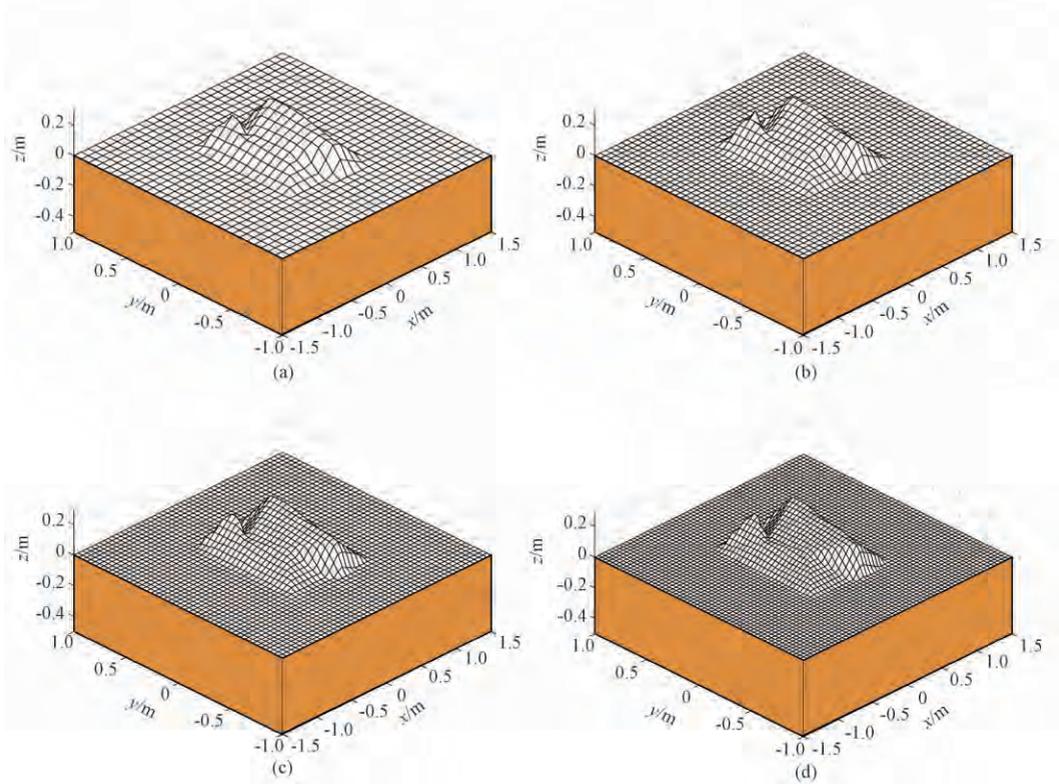


图 7 三维不规则形状载荷模型散点化过程示意图

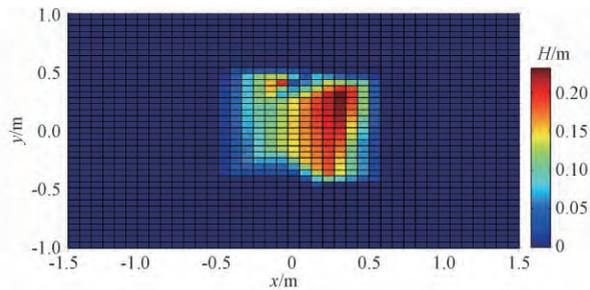


图 8 三维不规则形状载荷高程空间分布

由于密度不均匀的三维载荷和密度均匀的三维载荷在处理过程中只是权重的定义不同,为了清晰地说明载荷的建模方法,本文重点讨论密度均匀的三维载荷模型的建立方法。与二维不规则形状载荷模型类似,由于存在散点化的处理过程,需要验证计算结果随格网数目变化的收敛特征。图 9 为在杨氏模量  $E = 4 \times 10^7 \text{ Pa}$ 、泊松比  $\mu = 0.25$ 、总载荷力  $P = 2.0 \times 10^4 \text{ N}$  的条件下,  $M$  点  $(1.5 \text{ m}, -1.5 \text{ m}, -0.1 \text{ m})$  处垂向位移  $w$ 、 $x$  方向倾斜  $T_x$ 、 $y$  方向倾斜  $T_y$

及其一阶差分随格网划分的关系。由图可以看出,随着格网数的增加,垂向位移收敛于  $-2.3977 \times 10^{-5} \text{m}$  (图 9(a)),垂向位移的一阶差分结果也收敛于 0 (图 9(b))。 $x$  和  $y$  方向倾斜角度分别收敛于  $-8.005 \times 10^{-6} \text{rad}$  和  $8.5383 \times 10^{-6} \text{rad}$  (图 9(c)、(e)),其一阶差分结果也收敛于 0 (图 9(d)、(f))。该收敛特征也说明运用散点化方法计算三维不规则形状载荷模型的正确性和可行性。

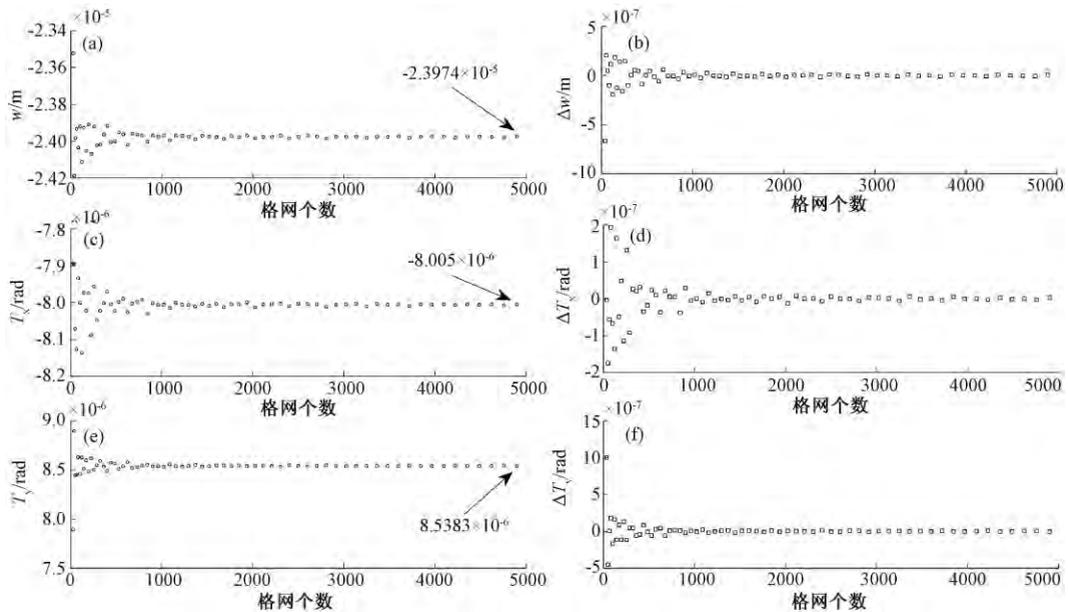


图 9 三维不规则形状载荷模型  $M$  点垂向位移、 $x$  方向倾斜角度、 $y$  方向倾斜角度与格网数的变化关系 其中,(a)为垂向位移与格网个数的关系,(b)为(a)序列的一阶差分;(c)为  $x$  方向倾斜角度与格网个数的关系,(d)为(c)序列的一阶差分;(e)为  $y$  方向倾斜角度与格网个数的关系,(f)为(e)序列的一阶差分

### 3 两种载荷模型计算结果的比较

为了讨论不规则形状载荷模型和质点载荷模型的差异性,本文计算了在  $y = 0.4 \text{m}$ , 深度为  $0.1 \text{m}$  时沿  $x$  方向二维不规则形状载荷模型(图 5)和质心模型引起的垂向位移  $w$ 、 $x$  方向倾斜量  $T_x$ 、 $y$  方向倾斜量  $T_y$  的变化(图 10(a)、(c)、(e)),为了进一步揭示二者的差异性,本文求出模型的差异与不规则载荷模型结果的百分比随距离的变化并绘成图 10(b)、(d)和(f)。

由图可以看出,两种模型在远距离端的差异呈逐渐减小的趋势,即两种模型的垂向位移  $w$ 、 $x$  方向倾斜量  $T_x$ 、 $y$  方向倾斜量  $T_y$  在远距离端计算结果趋于一致(图 10(a)、(c)、(e))。近距离端两种模型的差异性比较大,从  $w$ 、 $T_x$ 、 $T_y$  的差异百分比图(两模型计算结果差与不规则载荷模型结果的比值)也可以看出二者的差异性较大,有的甚至达到了 50% 以上(图 10(b)、(d)、(f)),该现象也说明在研究近距离端的垂向位移和倾斜场问题时,不应将载荷模型作简单的质点化处理。

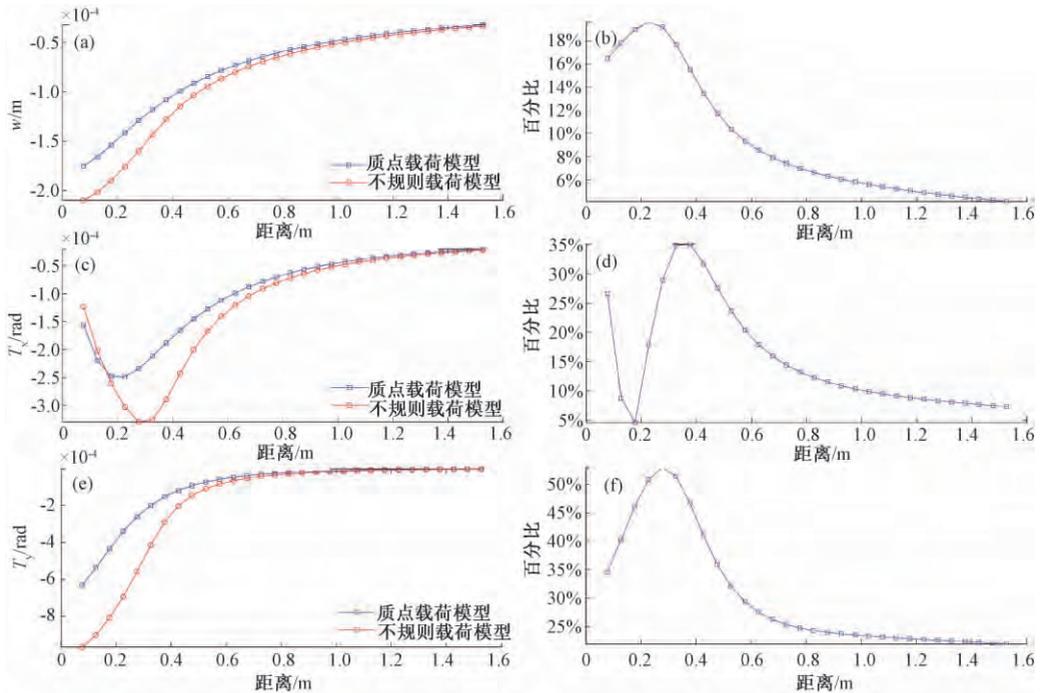


图 10 根据两种模型计算得到的垂直位移、 $x$  方向倾斜及  $y$  方向倾斜的结果比较  
 其中, (a) 为垂向位移的计算结果; (b) 为垂向位移的差异百分比; (c) 为  $x$  方向倾斜的计算结果; (d) 为  $x$  方向倾斜的差异百分比; (e) 为  $y$  方向倾斜的计算结果; (f) 为  $y$  方向倾斜的差异百分比

#### 4 不规则形状模型周边垂向位移场和倾斜场空间分布特征

运用前文提到的二维不规则载荷模型的建立方法, 本文计算了图 5 所示的不规则二维形状在  $z = -0.1\text{m}$  处的水平切面的垂向位移  $w$ 、 $x$  方向倾斜  $T_x$  和  $y$  方向倾斜  $T_y$  的空间分布等值线图(图 11)。可以看出, 在深度为  $0.1\text{m}$  处的水平切面, 垂向位移场的空间分布并非圆形, 而是与不规则形状具有一定相关性的不规则图形(图 11(a));  $T_x$  和  $T_y$  场的空间展布形状也与质点载荷引起的规则倾斜场(图 3)具有一定的差异性, 并表现出了和载荷形状具有一定的相关性。

由于三维模型受到散点高度权重的影响, 三维不规则载荷模型在  $z = -0.1\text{m}$  处的水平切面计算结果的空间不规则性更加突出。在深度为  $0.1\text{m}$  的水平切面, 垂向位移场的空间分布也非圆形(图 12(a));  $T_x$  和  $T_y$  场的空间展布形状也与质点载荷引起的规则倾斜场(图 3)在近场区域的差异性更大(图 12(b)、(c))。引起该差异性的原因除了载荷的水平投影的形状不规则外, 还和其散点化后载荷分配时的权重(高程)具有一定的关系。

#### 5 结论与讨论

综上所述, 不规则载荷在近场的垂向位移和水平向倾斜场可使用本文叙述的方法建立。二维不规则载荷模型的建立步骤可归纳为: 首先对载荷形状进行散点化, 其次根据不规则多

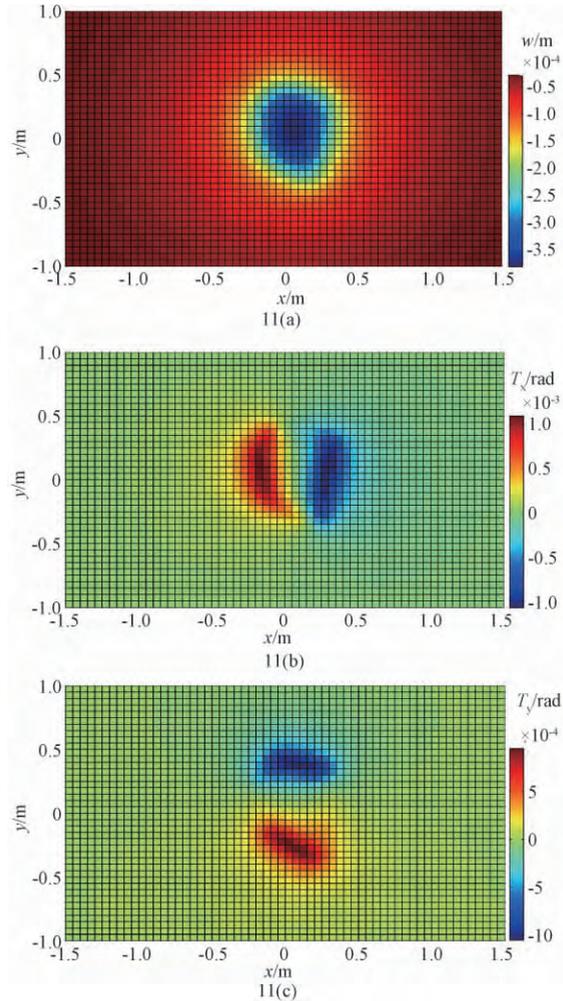
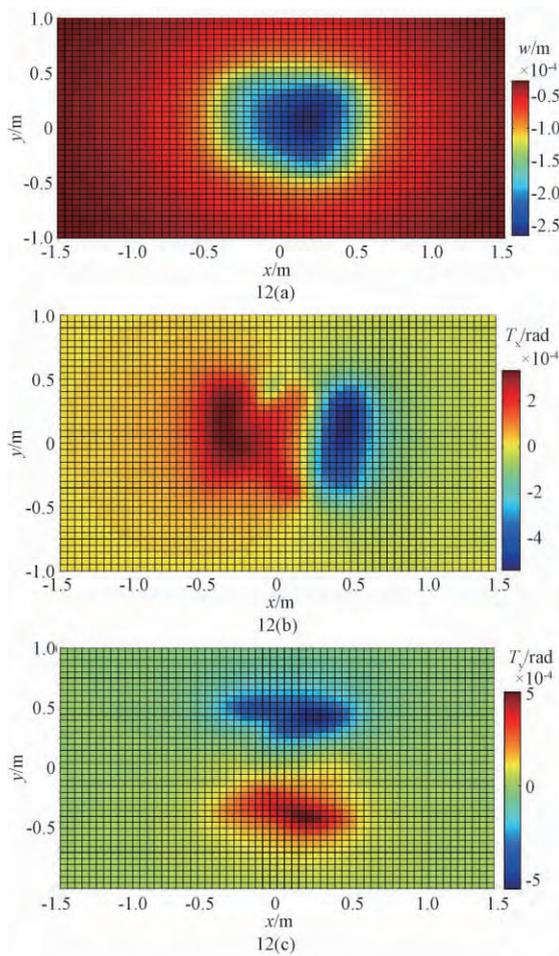


图 11 二维不规则载荷模型在深度为 0.1m 水平切面上垂向位移场 (a)、 $x$  方向倾斜场 (b)、 $y$  方向倾斜场 (c) 的空间分布

边形内散点个数对载荷  $P$  进行平均分配,然后分别计算各散点载荷对某点的影响,最后矢量化合成整个不规则载荷对该点的影响。三维不规则载荷模型的建立步骤可归纳为:首先对三维载荷形状在水平面的投影进行散点化,其次利用不同的散点的高程作为权重进行载荷  $P$  的重新分配,然后分别计算各散点载荷对某点的影响,最后矢量化合成整个不规则载荷对该点的影响。

相对以往质点简化模型,不规则形状载荷模型的建立可较细致地刻画不规则载荷近场的垂向位移和水平向倾斜场的特征。可为地表 GPS、洞体倾斜和钻孔倾斜类观测载荷影响分析提供理论计算依据。

本模型的适用条件是:①本模型只适用于单层介质模型问题;②在重新建立载荷  $P$  时,本文并未考虑散点之间存在垂向作用力或剪应力的情况。



12 三维不规则载荷模型在深度为 0.1m 水平切面上垂向位移场(a)、 $x$  方向倾斜场(b)、 $y$  方向倾斜场(c)的空间分布

**致谢:** 本研究中作者曾与中国地震局地震预测研究所张晶研究员和刘琦博士进行过有益的咨询和讨论,在成文过程中得到了中国地震台网中心马未宇博士和解滔博士的指导和帮助,匿名审稿人对论文的改进提供了中肯的建议,在此一并表示感谢。

## 参考文献

- 杜瑞林、乔学军、王琪等,2004,长江三峡水库蓄水荷载地壳形变-GPS 观测研究,自然科学进展,14(9),1006~1011。  
 胡卫建、张俊山、谢智等,2002,荷载对钻孔应变观测影响的实验动力学解析,地震,22(3),95~104。  
 黄庆享,2005,厚沙土层在顶板关键层上的荷载传递因子研究,岩土工程学报,27(6),672~676。  
 李祖宁、吴绍祖、陈光等,2007,利用点荷载叠加方法研究天马跨断层短水准异常资料,地震研究,30(1),35~38。  
 刘瑞春、季灵运、齐浪等,2012,临汾龙祠地震台水准测量巨幅形变异常综合分析,大地测量与地球动力学,32(4),20~24。  
 骆鸣津、池顺良、马鸿钧,2008,地层绝对应力测量与钻孔应变测量. 北京:地震出版社,170~177。  
 马栋、陈建国、郑爽等,2014,荷载对钻孔应变观测影响的实例分析,地震研究,37(1),79~81。  
 牛安福、张凌空、闫伟等,2009,汶川地震前南北地震带中北段地形变化特征的研究,地震,29(1),100~107。

- 牛安福、顾国华、曹景鹏等,2013,芦山  $M_s7.0$  地震前远、近场形变时空演化特征研究,地震学报,35(5),670~680。
- 牛安福、张凌空、闫伟等,2012,汶川地震近震源区地形变短期前兆现象的解析,地震,32(2),52~63。
- 邱泽华,2004,钻孔应变观测点到地面载荷干扰源最小“安静”距离的理论分析,岩石力学与工程学报,24(4),80~86。
- 邱泽华、张宝红、池顺良等,2010,汶川地震前站台观测的异常应变变化,中国科学(D辑),40(8),1031~1039。
- 邱泽华,2014,关于用密集钻孔应变台网监测强震前兆的若干问题,地震学报,36(4),738~749。
- 杨国春、吴银柱、于波等,2002,高层建筑深层平板载荷试验的研究,地质与勘探,38(4),90~93。
- 张惠兰,2013,建筑物载荷位置及大小对地表及隧道的影响研究,交通与建筑科学,5(10),149~151。
- 张晶、江在森、方颖等,2009,形变综合观测对地表构造变形的定量分析,地震,29(2),32~39。
- 张晶、江在森、方颖等,2007,汶川地震与首都圈地区数字化应变资料分析,地震,27(1),39~46。
- 张晶、陈荣华、杨林章等,2006,强震前形变潮汐异常判识与机理研究,地震学报,28(2),150~157。
- 周硕愚、吴云、施顺英等,2009,汶川 8.0 级地震前断层形变异常及与其它大震的比较,地震学报,31(2),140~151。
- 朱航、苏琴、杨涛等,2010,耿达短水准观测资料在汶川  $M_s8.0$  地震前后异常的辨别,地震学报,32(6),649~658。
- Boussinesq J, 1885, Application des Potentiels a L'etude de l'equilibre et due Mouvement des Solides Elastique. Gauthier Villars, Paris.
- Wang H, Hsu H, Zhu Y. ,2002, Prediction of surface horizontal displacements, and gravity and tilt changes caused by filling the Three Gorges Reservoir, Journal of Geodesy, 76(2), 105~114.
- Wang H,2000, Surface vertical displacements and level plane changes in the front reservoir area caused by filling the Three Gorges Reservoir, Journal of Geophysical Research, 105(B6), 13211~13220.

## Calculation of ground vertical displacements, tilts and their distribution characteristics around an irregularly load

Yan Wei Niu Anfu Chen Guoqin

China Earthquake Networks Center, Beijing 100045, China

**Abstract** Based on the load model of uniform isotropic semi-infinite elastic, we deduced a calculation of vertical displacement and tilt and proposed a method of calculation of vertical displacements and tilts caused by irregular load on the ground or underground at a certain point with two-dimensional and three-dimensional shape. We compared the difference between the simplified model and the irregular model. Finally the vertical displacements near the irregular load and the distribution of horizontal tilt are presented. The results show that, compared with mass simplified model, irregular load model has certain advantages for describing the near field. The establishment of two-dimensional irregular load model can help with the calculation of the modal vector superposition after the load scatter. The three-dimensional irregular load model can redistribute load scatter through different weight given to scatter after the load scatter. and then obtain displacement with the vector calculation method. The results of vector superposition calculation from scattered irregular load both in two dimension and three dimension are all convergent obviously as grids are becoming dense, and it is shown that the calculation method is correct and feasible.

**Key words:** Load model Tilt observation Vertical observation Analytical solution